

# ***ANÁLISE E CLASSIFICAÇÃO DE ERROS DE QUESTÕES DE GEOMETRIA PLANA DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS***

## **1- INTRODUÇÃO**

Este produto constitui-se em um relatório que tem como finalidade apresentar aos professores de matemática o resultado da análise dos tipos mais freqüentes de erros cometidos em geometria nas provas dos quatro anos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) por um conjunto de alunos de uma escola estadual que foram classificados na primeira fase da OBMEP de 2008.

Este relatório corresponde principalmente ao terceiro capítulo da dissertação, no qual as questões de geometria da primeira fase da OBMEP foram modificadas para o formato discursivo, aplicadas aos alunos e depois estudadas sob o enfoque da análise dos erros cometidos. O objetivo foi apontar as principais dificuldades que os estudantes tem em relação à aprendizagem de geometria, assim como foram valorizadas as suas falas e sugestões. A partir da análise, foram retiradas algumas conclusões que poderão auxiliar professores de matemática na sua prática docente nas aulas de geometria.

O relatório também inclui algumas observações sobre a escola em que foi feita a pesquisa, a metodologia adotada no estudo e classificação dos erros e considerações finais da pesquisa realizada. No final do produto, encontra-se a bibliografia da dissertação, caso o leitor queira maiores informações a respeito de referencial teórico de análise de erros, avaliação e ensino de geometria, entre outros.

## 2- A ESCOLA E A METODOLOGIA DA PESQUISA

Os dados analisados foram coletados numa escola estadual próxima ao centro do município de Nova Iguaçu - a maior cidade da região da Baixada Fluminense<sup>1</sup>; limitada geograficamente por oito municípios, inclusive o do Rio de Janeiro. Devido a sua localização, a escola recebe alunos provenientes do centro da cidade, da periferia e de várias escolas municipais de Nova Iguaçu e municípios vizinhos que não oferecem ensino médio.

Todos os alunos da escola foram inscritos na primeira fase da OBMEP de 2008, um total de 500 alunos de ensino médio. Destes, vinte e cinco foram classificados para segunda fase por estarem dentro dos cinco por cento com melhor pontuação na primeira fase, e três; que não se classificaram para a segunda fase, mas foram convidados a participar da pesquisa por serem considerados pelos respectivos professores de matemática os melhores alunos de três turmas. Dos vinte oito participantes, dezoito alunos vieram de outras instituições do município.

A pesquisa realizada contou com uma heterogeneidade benéfica, o que dá a ela maior credibilidade e confiança, pois os alunos eram provenientes de diferentes contextos escolares e sociais e foram expostos aos mais variados tipos de professores e metodologias por estes empregadas.

Todos os participantes da pesquisa foram convidados a resolver de maneira discursiva vinte e oito questões de geometria, que foram aplicadas de forma objetiva (múltipla escolha) na primeira fase dos quatro anos de OBMEP. A quantidade de questões de cada ano foi a seguinte: nove questões do ano de 2005, seis de 2006, sete de 2007 e seis de 2008.

A coleta de dados que envolveram a aplicação das novas provas, análise superficial (primeira análise) dos erros e entrevistas foi realizada nos quatro últimos meses de 2008, para que depois fosse feita a seleção das questões que seriam avaliadas e a análise final dos erros.

Conforme já observado, as referidas questões sofreram modificações no que concerne ao formato original da prova: as questões objetivas foram aplicadas de maneira discursiva (questões abertas), ou seja, não foram oferecidas as alternativas

---

<sup>1</sup> De acordo com o Centro de Informações e Dados do Rio de Janeiro (CIDE), a Baixada Fluminense inclui os seguintes municípios da Região Metropolitana do Rio de Janeiro: Belford Roxo, Duque de Caxias, Guapimirim, Itaguaí, Japeri, Magé, Mesquita, Nilópolis, Nova Iguaçu, Paracambi, Queimados, São João de Meriti e Seropédica.

do formato múltipla escolha. Depois de modificadas, foram aplicadas em quatro provas separadas por cada ano da OBMEP.

Na primeira prova, dez alunos, já classificados para a segunda fase da OBMEP, alegaram não saberem resolver nenhuma das questões, agora, discursivas. Estes mesmos alunos levaram apenas cinco minutos para ler, tentar resolver e entregar a prova, o que demonstrou total desinteresse dos mesmos com o trabalho.

Quando indagados sobre o motivo do desinteresse, responderam que 'chutaram todas as questões da prova da primeira fase', por isso foram aprovados para a segunda fase da OBMEP e agora, diante das questões discursivas, não faziam a menor idéia de como resolvê-las. Esses dez alunos desistiram de participar da pesquisa, pois alegaram não ter condições alguma de resolver as questões. Assim sendo, restaram dezoito alunos que resolveriam as três provas seguintes.

Cada prova continha um questionário anexo com perguntas objetivas, que visam entender os motivos que levaram os alunos a não responderem ou a não resolverem as questões. Também se desejava verificar se haviam entendido o enunciado e desenhos e se os assuntos teriam ou não sido abordados nas aulas de matemática. Além disso, as perguntas também apresentavam espaço aberto para comentários dos alunos sobre cada questão. Mesmo não resolvendo a questão, era importante saber que caminho seguir para tal, se teriam somente esquecido as fórmulas ou teriam se perdido no meio da resolução do problema. Também havia a intenção de que fizessem comentários da prova em geral. O questionário teve como objetivo principal diminuir dúvidas que poderiam aparecer no momento da análise.

Após a realização das quatro provas com as questões selecionadas, foi feita uma análise superficial (primeira análise) das resoluções para que pudessem ser detectadas quais questões precisariam de entrevistas com os alunos.

Ao agendar e realizar as entrevistas individuais com os participantes desta pesquisa tinha-se o objetivo de entender melhor e de forma generalizada o tipo de raciocínio utilizado por cada participante no processo de resolução das questões. As entrevistas foram essenciais para demonstrar o caminho percorrido por cada aluno, para destacar o fluxo de pensamento utilizado para se chegar a um tipo de resposta, estivesse esta correta ou não. As entrevistas, nesta pesquisa, tomaram forma de um procedimento "[...] que enfatiza a importância de se analisar o *processo* e não

apenas o produto, como por exemplo, a resposta final de um exercício ou a alternativa assinalada em um teste de múltipla escolha". (Cury 2007, p.27).

Das vinte e oito questões, nove foram selecionadas para uma análise mais profunda. O critério utilizado para seleção foi: quantidade de questões resolvidas consideradas correta ou não, ou seja, foram selecionadas as questões em que mais de nove (cinquenta por cento) alunos tentaram resolver ou mostraram o caminho das resoluções através dos questionários.

As questões selecionadas e que foram objeto de análise mais profunda da pesquisa são as de número 02, 03, 08 e 17 da prova de 2005, 04 e 05 da prova de 2006, 06 de 2007 e 04 e 08 de 2008.

### **3- CLASSIFICAÇÃO DE ERROS**

Conforme já comentado, a análise dos erros foi centrada em questões discursivas de forma a buscar subsídios para identificar quais conhecimentos os alunos já detinham em geometria plana.

Foi feita a opção por se analisar erros cometidos, pois de acordo com Cury (2003), esse tipo de análise se caracteriza como uma metodologia de pesquisa, com abordagens distintas, segundo os pesquisadores e as teorias que embasam essas investigações, e como uma metodologia de ensino, no momento em que são propostas atividades de exploração e análise conjunta dos erros, como fonte de construção de novos conhecimentos.

A classificação de erros utilizada na pesquisa foi a de Radatz, que serve como base para outras classificações presentes na maioria das pesquisas sobre o estudo dos erros de autores como Borasi (1985, 1987, 1996), Rico (1995), Souza (2002), Esteban (2003), Buriasco (1999, 2004), Silva e Buriasco (2005), Garnica (2006), Fiorentini (2006), Pinto (2000), Perego (2006), Santos (2007), Cury (2004, 2006, 2007, 2008) dentre outros.

A referida classificação dos erros creditada a Radatz (1979, p. 165-169) é a seguinte:

- erros devido a dificuldades na linguagem: são apresentados na utilização de conceitos, vocabulário e símbolos matemáticos, e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática.

- erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldades em obter informação a partir de representações gráficas): aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico.
- erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiências na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos.
- erros devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem os erros por persistência, erros de associação, de interferência e de assimilação.
- erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: são produzidas por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos. (tradução minha)

O enquadramento dos erros cometido pelos alunos foi feito levando em consideração a experiência do autor da dissertação, que é professor dos ensinos fundamental e médio da rede pública estadual e municipal e que acompanha alguns processos da OBMEP há quatro anos.

A análise de erros, mesmo tendo como base uma classificação teórica já conhecida, depende da experiência docente, e é subjetiva. Um erro cometido por um aluno na resolução de uma questão pode, seguindo essas classificações, envolver mais de um tipo de erro. De acordo com Radatz “é muito difícil fazer uma separação definitiva entre as possíveis causas de um mesmo erro, o mesmo problema pode suscitar erros de diferentes fontes e o mesmo erro pode surgir de diferentes processos de resolução de problemas” (1979, p.164).

Foi escolhida uma análise extensiva das questões e não intensiva, ou seja, se optou por analisar o maior número de questões para verificar o maior número de tipos de erros.

#### **4- ANÁLISE DOS ERROS NAS QUESTÕES DE GEOMETRIA DA OBMEP**

Esta seção corresponde, com as devidas adaptações, ao capítulo 3 da dissertação no qual é feita a análise das questões que os alunos erraram ou não apresentaram sua resolução completa e a classificação dos seus erros. Ao longo da

análise, são tecidos comentários sobre as respostas dadas tanto às entrevistas como aos questionários.

Antes de proceder à análise e classificação dos erros cometidos pelos alunos, são feitas as seguintes considerações:

- O enquadramento dos erros cometidos pelos alunos, segundo o critério de Radatz, baseou-se na experiência docente do autor da dissertação. Outro profissional poderia tê-los classificados de outras maneiras.
- O erro cometido por um aluno na resolução de uma questão pode envolver mais de um tipo de erro. Quando isso ocorre, será feito um comentário.
- A análise das questões é extensiva e não intensiva, ou seja, a opção foi analisar o maior número de questões para verificar o maior número de tipos de erros, inclusive por meio de um gráfico para quantificá-los.
- Os erros de acentuação, pontuação e concordância cometidos pelos alunos nas respostas dos questionários, entrevistas e suas justificativas nas provas, não foram corrigidos, mas quando necessário é feita uma nota para facilitar o entendimento do leitor.

A análise será feita por questão. A resolução dos alunos não será colocada no corpo do produto, mas se encontra nos anexos da dissertação disponível para consulta, caso o leitor queira esclarecer algum aspecto.

#### 4.1 QUESTÃO 02 DE 2005:

*Uma folha de papel retangular, de 10 cm de largura por 24 cm de comprimento, foi dobrada de forma a obter uma folha dupla, de 10 cm de largura por 12 cm de comprimento. Em seguida, a folha dobrada foi cortada ao meio, paralelamente à dobra, obtendo-se assim três pedaços retangulares. Qual é a área do maior pedaço?*

Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, três acertaram a questão, seis deixaram-na em branco e nove erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos, encontram-se no anexo H-1 da dissertação.

### **Erros referentes à dificuldade na linguagem:**

O aluno 16 respondeu no questionário que não tinha entendido o enunciado da questão, mas pode-se observar por seu desenho que entendeu a primeira parte do enunciado que diz: 'Uma folha de papel retangular, de 10 cm de largura por 24 cm de comprimento, foi dobrada de forma a obter uma folha dupla, de 10 cm de largura por 12 cm de comprimento.', pois realizou somente a primeira etapa da resolução.

O aluno 04 realizou a primeira parte do enunciado, como o aluno 16 acima, e no questionário escreveu que usaria a fórmula da área do retângulo para resolver a questão a partir do ponto em que ele parou. É interessante observar que o aluno, apesar de não ter compreendido totalmente o enunciado e não ter concluído todas as etapas para a resolução da questão, chegou à resposta correta. Calculou, em um rascunho, a área de um retângulo, mas não do retângulo correto. Seguindo sua linha de raciocínio, posso afirmar que se a questão estivesse no formato múltipla escolha, ele a acertaria, ou seja, seu erro ficaria mascarado por uma resposta correta.

O aluno 15 só realizou a primeira etapa, como fizeram os dois alunos acima, ou seja, desenhou a folha no formato retangular e realizou a primeira dobra. Não fez nenhum comentário sobre a questão. Pela análise que faço de sua resposta, suponho que não tenha entendido a parte final do enunciado da questão onde dizia: 'Em seguida, a folha dobrada foi cortada ao meio, paralelamente à dobra, obtendo-se assim três pedaços retangulares. Qual é a área do maior pedaço?'

O aluno 09 demonstrou conhecimento sobre área do retângulo, cometeu erro no entendimento do enunciado, desconsiderando um pequeno trecho do mesmo: 'a folha dobrada foi cortada ao meio, paralelamente à dobra'. O aluno cortou exatamente na dobra. O mesmo participante respondeu à entrevista: 'A metade da folha dobrada em 3 pedaços obtendo três pedaços de larg. 4 e comp. 10, e área de 40 cm'.

O aluno 11 escreveu que ‘não existe (área)<sup>2</sup> pois o retângulo só pode ser dividido em 2 partes’ e, no questionário, afirmou ser muito complicado resolver a questão e que não conseguiu entender muito bem o enunciado.

Ao concluir a análise da questão, são atribuídas as dificuldades encontradas por esses alunos à existência de vários procedimentos concernentes às dobras feitas na folha de papel. Tais procedimentos dificultaram a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática, bem como exigiram um nível de abstração geométrica muito grande da parte dos alunos. Um fato que pode corroborar tal afirmativa é que, no momento da aplicação da prova, eu o professor observou que a maioria dos alunos tentava realizar todas as dobras citadas na questão na folha da prova na tentativa de facilitar a visualização das etapas.

### **Erros referentes à deficiência de pré-requisitos:**

O aluno 18 confundiu papel de formato retangular com o de formato triangular, realizou corretamente todos os procedimentos da questão com o formato incorreto e, por isso, não chegou à resposta desejada. Acredita-se que, por este aluno ser do curso noturno e, provavelmente, ter ficado muitos anos afastado da escola, ele tenha se esquecido ou confundido as definições de retângulo e triângulo, que envolvem um conteúdo que não é específico do ensino médio. Isto pode ter sido uma das causas do erro.

O aluno 05 tentou desenhar o papel no formato retangular e realizou algumas dobras, conforme pedia a questão, mas interrompeu seu raciocínio. Afirmou no questionário anexo a sua prova que não entendeu o enunciado e não se lembrava da fórmula da área do retângulo, por isso não sabia como continuar a resolver a questão. Vale lembrar que quando este aluno afirma não ter entendido o enunciado da questão, poderia também classificar este tipo de erro como de dificuldade na linguagem, mas por sua produção escrita (desenho), foi observado que ele estava no caminho correto para chegar à resolução da questão. Assim sendo, classifica-se esse erro, não como de falha no entendimento da linguagem,

---

<sup>2</sup> Acréscimo do autor para facilitar o entendimento.

mas como um erro referente à deficiência de pré-requisitos. Acredita-se que o aluno não tenha dado continuidade à resolução porque não conseguia se lembrar da fórmula da área do retângulo.

O aluno 14 entendeu o enunciado, pois realizou, por meio de desenhos, todas as etapas da questão. Indicou a parte da folha que teria o maior retângulo e as medidas corretas dos lados, mas não realizou os cálculos necessários para chegar ao valor da área. No questionário escreveu que não se lembrava da fórmula da área. Considerou-se que esse aluno acertou parte da questão; ele indicou qual seria o maior pedaço da folha que daria o valor correto da área que é pedida no enunciado.

### **Erro referente à aplicação de regras:**

O aluno 10 usou a fórmula da área de um triângulo onde era para ter sido usada a do retângulo, sem fazer nenhum desenho nem comentário, simplesmente aplicou a fórmula e coincidentemente chegou à resposta correta, o que indica, que se a questão estivesse originalmente no formato múltipla escolha, acertaria a resposta. Isto se caracterizaria num erro grave que ficaria mascarado por uma resposta correta. Quando perguntado na entrevista sobre o procedimento adotado, olhou sua resolução com mais calma e ficou em dúvida, fez então a seguinte pergunta: 'professor, essa fórmula não é da área do triângulo?' Esclarecida a dúvida, respondeu na entrevista da seguinte forma 'troquei a fórmula do retângulo pela do triângulo. Esqueci de dividir o 10 pela metade', o que comprova a classificação feita.

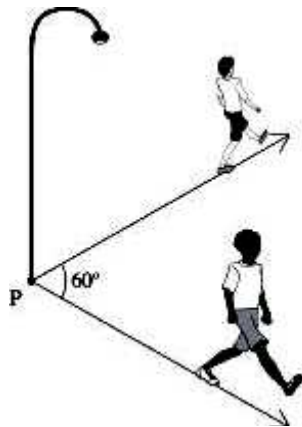
Conclui-se que o professor de matemática é, de certa forma, responsável pela maneira como os alunos entendem as questões. É fundamental que este profissional se preocupe, desde cedo, em oferecer questões e atividades que envolvam abstração, graduando-as progressivamente ao longo de todo o ensino fundamental. O planejamento de aulas pensado desta forma promoverá tanto o contato dos aprendizes com uma variedade enorme de questões que apresentam diversos níveis de abstração como com a linguagem utilizada neste tipo específico de questão.

Os erros citados acima, tanto referentes à deficiência de pré-requisitos quanto referente à aplicação de regras, podem ser atribuídos ao fato de que, em

muitos casos, não se estuda geometria de forma concomitante com álgebra e aritmética, por isso tais conceitos e conteúdos caem no esquecimento ou talvez nunca tenham sido vistos pelos alunos.

### 3.2 QUESTÃO 03 DE 2005:

*Dois amigos partem ao mesmo tempo do ponto  $P$  e se afastam em direções que formam um ângulo de  $60^\circ$ , conforme mostra a figura. Eles caminham em linha reta, ambos com velocidade de  $6 \text{ km/h}$ . Qual será a distância entre eles 1 minuto após a partida?*



Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, nenhum acertou a resolução da questão, oito deixaram-na em branco e dez erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-2 da dissertação.

#### **Erros referentes à dificuldade na linguagem:**

Os alunos 02, 03, 12, 13 e 16 resolveram a primeira parte da questão, ou seja, descobriram quanto cada um dos amigos tinha caminhado e julgaram que esta seria a resposta final. Os mesmos ignoraram que a questão exigia determinar a

distância entre os amigos. Mostraram com isso a dificuldade no entendimento do enunciado, que inclui, falta de concentração e atenção na leitura.

Os alunos 02, 13 e 16 chegaram a um resultado aplicando regra de três simples, para isso fizeram algumas transformações, conforme é possível observar na seguinte resposta, dada pelo aluno 03 à entrevista: 'Porque eu passei 6 km para metros e 1 hora para 3600 segundos. E 1 minuto para 60 segundos'.

Os alunos 03 e 12 usaram, provavelmente, conceitos de física (distância = velocidade x tempo) e chegaram ao mesmo resultado dos demais.

Por pura coincidência, todos os alunos dos três grupos analisados aqui chegaram à resposta correta, o que indica que se a questão estivesse ainda no formato múltipla escolha acertariam a resposta e com isso, o erro de vários alunos estaria mascarado.

Todos os alunos acima julgaram que tinham terminado a resolução da questão quando encontraram o quanto cada amigo tinha caminhado. Não perceberam que deveriam continuar resolvendo a questão para descobrir a distância entre eles.

O aluno 10 utilizou o mesmo método que os alunos 02, 13 e 16, mas errou na ordem das grandezas da regra de três, ou seja, fez as transformações corretamente, porém quando foi preparar a regra de três, em vez de escrever que 6000 metros correspondem a x metros, escreveu que 6000 metros estão para 60 segundos. O erro deste aluno poderia ser classificado como deficiência de pré-requisitos, mas da mesma forma que seus colegas acima, ele resolveu a regra de três e não deu continuidade à questão, cometeu, portanto, o mesmo erro que eles, pois não observou que era pedida a distância entre os amigos.

Uma análise superficial e rápida dos erros cometidos pelos alunos acima poderia levar a uma classificação incorreta sobre o que realmente ocorreu. Devido à grande quantidade de estudantes que incidiram no mesmo tipo de erro, não os classificaria como falta de atenção pura e simplesmente, apesar desta ter contribuído para as respostas incorretas, os alunos demonstraram principalmente dificuldade em efetuar a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática.

O aluno 11 fez a seguinte afirmação no local destinado ao cálculo 'não haveria distância porque os dois partem do mesmo lugar e na mesma velocidade'. No questionário disse não ter entendido bem a questão. Mostrou que entendeu o

enunciado e também o desenho da questão, pois parece ter compreendido que os amigos estariam na mesma posição, mas desprezou no desenho e no enunciado a menção ao ângulo de  $60^\circ$  que distinguia a direção de cada um.

Acredita-se que o erro de dificuldade na linguagem pode ser diminuído ao se trabalhar, desde o primeiro ano de escolaridade, com atividades que priorizem a interpretação do enunciado e o processo para se chegar à resposta com menos cálculos aritméticos e algébricos. Questões do tipo: calcule, resolva e arme e efetue devem ser evitadas. Para praticar os cálculos aritméticos e algébricos que são trabalhados em questões deste tipo, pode-se, por exemplo, incluí-las dentro de um problema em vez de tratá-las isoladamente, como muitas vezes é visto.

#### **Erro devido a associações incorretas:**

Os alunos 15 e 18 responderam que 'a distância entre eles 1 minuto após a partida será de  $360^\circ$ ', não fizeram nenhum comentário no questionário, foi necessária então uma entrevista na qual responderam; 'multipliquei  $60^\circ$  por 6 km' e não souberam explicar por que fizeram isso.

#### **Erro devido a dificuldades para obter informação espacial:**

O aluno 14 transformou erradamente 6 km/h em 6000 metros e corretamente 1 minuto em 60 segundos. Apesar deste erro inicial, o aluno encontrou a distância correta percorrida por cada um dos amigos, como fez a maioria de seus colegas nesta questão. Parece que o aluno não entendeu o desenho, pois somou a distância entre eles como se tivessem caminhado em linha reta e em direção opostas, ou seja, como se tivessem formado um ângulo de  $180^\circ$  e não  $60^\circ$ , conforme consta na questão. O curioso é que no seu desenho ele coloca o valor correto do ângulo.

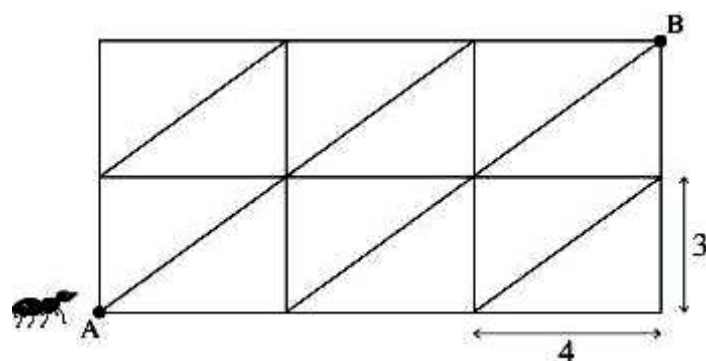
Diferentemente de todos os seus colegas, o aluno 14 demonstrou ter entendido o que o enunciado pedia: a distância entre os amigos, pelo que realizou

no desenho e pelos cálculos. O que se observa, neste caso, é que ele cometeu dois erros que podem ser classificados de três formas: associação incorreta, pois o valor encontrado por ele só seria possível se o ângulo formado pelos amigos após a caminhada fosse de  $180^\circ$ ; deficiência de pré-requisitos, quando errou na transformação de unidades de comprimento e, finalmente dificuldade em lidar com a representação espacial de uma situação matemática uma vez que não percebeu que os amigos não caminharam em direções opostas, o que poderia ter sido observado facilmente pelo desenho.

Diante da análise dos erros desta questão, vê-se como é importante trabalhar mais em sala de aula com figuras e representações geométricas e sempre oferecer atividades que ajudem os estudantes a relembrar os conceitos estudados anteriormente. Um planejamento mais detalhado e focado nessas questões, com certeza, melhoraria o entendimento dos alunos do que se espera deles em cada enunciado.

### 3.3 QUESTÃO 08 DE 2005:

*Uma formiga está no ponto A da malha mostrada na figura. A malha é formada por retângulos de 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. A formiga só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos retângulos. Qual é a menor distância que a formiga deve percorrer para ir de A até B?*



Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, dois acertaram a questão, sete deixaram-na em branco e nove erraram ou não concluíram a questão. A questão

exige a utilização do Teorema de Pitágoras. Todas as resoluções dos alunos, assim como seus desenhos encontram-se no anexo H-3 da dissertação.

### **Erros devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio:**

O aluno 05 somou os lados do retângulo, mas não considerou que a menor distância entre os vértices do retângulo é a medida da diagonal. Acredita-se que ele optou por este cálculo pela facilidade que a questão oferecia, ou seja, ela já apresentava algumas medidas. O aluno utilizou-se delas para resolver a questão, ao invés de tentar encontrar o valor ou calcular a medida diagonal. Por isso, não teceu comentário algum no questionário sobre a necessidade de utilizar o Teorema de Pitágoras.

### **Erros devido à deficiência de pré-requisitos:**

O aluno 03 indicou no desenho o menor caminho a ser percorrido e no questionário anexo escreveu que tentaria determinar a diagonal do retângulo, mas não disse como faria isso. Não foi possível saber se não lembrava da fórmula ou se não sabia qual fórmula deveria ser usada.

Os alunos 14 e 16 ‘chutaram’ e erraram a medida para diagonal do retângulo, ao invés de utilizar o Teorema de Pitágoras, mas souberam indicar no desenho o menor caminho a ser percorrido pela formiga por meio dos cálculos realizados com a medida errada da diagonal.

O aluno 06 também ‘chutou’ erradamente uma medida para diagonal do retângulo, depois somou as medidas de uma diagonal com uma largura e dois comprimentos e assim errou na escolha do menor caminho. Por este motivo seu erro pode ser classificado também como de dificuldade para obter informação espacial, pois o menor caminho para a formiga percorrer do ponto A até o ponto B, é feito por duas diagonais e um comprimento.

Os alunos 12 e 13 acertaram a resposta, mas a justificativa de como encontraram a medida da diagonal foi 'chute'; o que se comprova na justificativa do aluno 13 '2 cm metade do comprimento + 3 cm metade da largura', e o aluno 12 encontrou a resposta de forma puramente visual, com isso obtiveram 5 cm para medida da diagonal, que é a correta. Os alunos acertaram também a escolha do menor caminho a ser percorrido, o que indica que se a questão estivesse no formato de múltipla escolha, acertariam a resposta. Um erro grave que ficaria mascarado por uma resposta correta.

O aluno 18 'chutou' as medidas das duas diagonais e escreveu que a sua soma com um dos comprimentos da figura é igual à soma das medidas das 'beradas' (lados do maior retângulo), ou seja, três comprimentos e duas larguras. Por falta de atenção, somou errado essas medidas e encontrou 19 cm em vez de 18 cm. Mas o erro mais grave desse aluno não foi no momento de somar as medidas, que pode ter sido por pura falta de atenção, e sim quando afirmou que 'tanto faz ir pelas diagonais ou pelas beradas, pois ambas tem a mesma distâncias de 19 cm'. Com essa explicação, o aluno demonstrou deficiência de conceitos prévios sobre o Teorema de Pitágoras bem como de noções de menor distância e dificuldades para obter informação espacial.

### **Erros devido a dificuldades na linguagem:**

O aluno 02 utilizou corretamente o Teorema de Pitágoras para determinar a diagonal do retângulo, mas errou na hora de escolher o menor caminho a ser percorrido e somar as medidas. Ele deu a seguinte justificativa para o que fez; 'pois só pode caminhar pelos lados'. Num primeiro momento, este erro foi classificado como dificuldade para obter informação espacial, mas depois da entrevista, se observou que se caracterizava num erro de leitura ou desatenção.

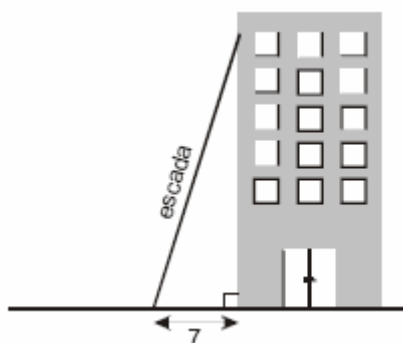
Os conteúdos exigidos nesta questão, tanto o Teorema de Pitágoras como noções de menor distância, são trabalhados, costumeiramente em sala de aula, nos níveis de ensinos fundamental e médio. Mesmo sabendo que a maioria dos alunos conhece e sabe enunciar o teorema, observou-se que dos dezoito alunos

apenas três conseguiram identificar que deveriam tê-lo aplicado para resolver a questão.

Se esta questão fosse aplicada em uma aula sobre Teorema de Pitágoras ou se fosse mencionado, no corpo da questão, qual conteúdo que deveria ter sido aplicado para resolvê-la, é provável que a maioria dos alunos teria acertado. Isto demonstra o quanto é importante trabalhar questões contextualizadas que acostumem os alunos a investigarem as possíveis formas para a resolução de questões, baseadas tanto no conteúdo que está sendo estudado no momento como relacionadas aos conhecimentos acumulados ao longo das aulas de matemática.

### 3.4 QUESTÃO 17 DE 2005:

*O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?*



Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, um acertou a questão, sete deixaram-na em branco e dez erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-4 da dissertação.

**Erros devido a dificuldades na linguagem:**

Os alunos 07 e 10 confundiram o enunciado e o desenho, entenderam que os 25m de comprimento da escada seria a altura considerada da base do edifício até onde ela estava encostada. Sem utilizar nem fazer nenhum outro desenho, realizaram os seguintes cálculos: '25 metros da altura menos 4 metros igual a 21 metros e concluíram 7 metros de distância da base menos 4 metros igual a 3 metros' e afirmaram que este seria o deslocamento do pé da escada. Diminuíram a mesma medida na altura e na base do triângulo que foi formado pela escada, o prédio e o solo, o que pode ser percebido em uma das entrevistas dos alunos: 'como o topo da escada diminui 4 metros pensei que era pra diminuir 4 metros na base'.

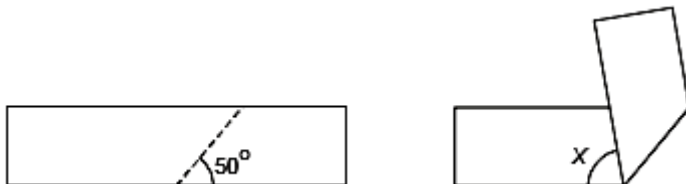
Já os alunos 01, 05, 12, 14, 15 e 18 seguiram o raciocínio parecido com os alunos 07 e 10. Entenderam que, à medida que a altura onde a escada está encostada (quando escorregar), é diminuída de um certo valor, erradamente, é aumentada o mesmo valor na medida na base. O raciocínio dos alunos utiliza a idéia de proporcionalidade de forma indevida.

O aluno 02 tentou aplicar uma regra de três como se estivesse trabalhando com semelhança de triângulos. Errou também quando pensou que o comprimento da escada (hipotenusa) fosse a altura da base do prédio até o topo da escada, conforme resposta à entrevista 'achei que o valor 25m era a altura'. Aqui também está embutida a utilização de proporcionalidade de maneira indevida

É interessante observar nesta questão que os alunos não perceberam que não haviam entendido o enunciado. Tendo como base uma visão superficial dos erros, foram classificados como dificuldade na linguagem, mas existem outras classificações possíveis. Caso se analisasse tais erros de forma mais profunda, poderia também classificá-los como dificuldade em obter informação espacial pelo fato de os alunos não terem entendido o desenho e confundido a altura da base do prédio até o topo da escada com o comprimento da mesma. Houve erros de aplicação de regras quando usaram a idéia de proporcionalidade e de semelhança de triângulos de forma indevida. Devido à grande variedade de erros cometidos, pode-se englobar todos na classificação como deficiência de conteúdo.

### 3.5 QUESTÃO 04 DE 2006:

Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana da direita. Qual o valor do ângulo  $x$ ?



Esta questão estava presente na prova do nível 2 e também na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, dois acertaram a questão, oito deixaram-na em branco e oito erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-5 da dissertação.

#### **Erros devido a dificuldades na linguagem e para obter informação espacial:**

Os alunos 01, 04, 13, 16, e 17 resolveram a questão seguindo a mesma linha de raciocínio e cometeram o mesmo tipo de erro. No primeiro momento, parecem não ter entendido o enunciado e os dois desenhos. Ignoraram completamente o segundo desenho e realizaram os cálculos tendo como base apenas o primeiro, antes do papel de formato retangular ser dobrado, conforme é mencionado no enunciado da questão. Ao fazerem os cálculos, tais alunos demonstraram conhecer o valor de um ângulo raso e como se opera com ângulos suplementares; fato que numa questão de múltipla escolha seria impossível perceber e não valorizaria parte do conhecimento acumulado pelo aluno ao longo de sua vida escolar.

#### **Erros devido a dificuldades na linguagem, de associação incorreta e erros devido a dificuldades para obter informação espacial:**

O aluno 10 desenhou um triângulo e aplicou o conceito de soma dos ângulos internos de um triângulo sobre o primeiro desenho, mas não deu continuidade, ignorando o segundo desenho. Parece que não entendeu o enunciado e o segundo desenho, pois o ignorou completamente.

**Erros devido à deficiência de pré-requisitos e devido a dificuldades para obter informação espacial:**

O aluno 05 não justificou sua resposta com conceitos ou conteúdos matemáticos para os valores encontrados, ele simplesmente ‘chutou’ e fez a seguinte afirmação na parte da prova reservada para os cálculos: ‘quando corta da  $75^\circ$  mas quando dobra deve dar  $50^\circ$ ’. Ele arriscou valores de forma puramente visual, fato justificado pela resposta dada à entrevista ‘Porque a tira do papel no meus calculos tinha  $100^\circ$  mais cortaram no meio  $50^\circ$  só que diminuíram então um lado ficou mais que o outro  $75^\circ$ ’.

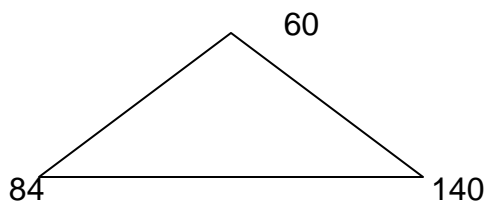
O aluno 15 utilizou o mesmo raciocínio de seu colega e encontrou o mesmo resultado, mas diferentemente daquele, justificou os valores com equações. Na verdade, acredita-se que o aluno também encontrou o resultado visualmente e depois tentou justificar, por meio de equações.

Esta questão é de entendimento e enunciado simples, pois apresenta texto de apenas duas linhas, ou seja, poucas etapas a serem seguidas (apenas uma dobra) para sua resolução, diferente de outras questões que estão sendo analisadas nesta pesquisa. Além disso, é uma das poucas questões que fazem parte da prova do nível 2 (para alunos do oitavo e nono anos de escolaridade). Mesmo assim, dos dezoito alunos de ensino médio participantes da pesquisa, apenas três acertaram a questão. Isso mostra, mais uma vez, que a deficiência dos alunos em geometria vai se acumulando desde os primeiros anos do ensino fundamental. Credita-se a maior dificuldade dos alunos no momento de resolverem esta questão, ao entendimento do segundo desenho, pois não compreenderam a dobra realizada. Por esse motivo,

todos os erros cometidos nesta questão foram classificados como dificuldades para obter informação espacial.

### 3.6 QUESTÃO 05 DE 2006:

*Os comprimentos dos lados do triângulo da figura são números inteiros. Junto a cada vértice aparece o produto dos comprimentos dos lados a ele adjacentes. Qual é o perímetro do triângulo?*



Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, dois acertaram a questão, quatro deixaram-na em branco e doze erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-6 da dissertação.

#### **Erros devido à deficiência de pré-requisitos e devido a associações incorretas:**

O aluno 04 deixou a questão em branco, mas respondeu no questionário, na parte reservada para comentários, que 'Precisaria da fórmula (cateto oposto, adjacente, hipotenusa) para saber quanto valeria cada lado p/ depois somá-los'. O aluno se referiu, talvez, ao Teorema de Pitágoras mesmo que não o tenha enunciado. O conteúdo mencionado por ele era inadequado para resolver essa questão. Cabe observar que no seu comentário, o aluno demonstrou ter a noção de perímetro.

## **Erros devido a dificuldades na linguagem:**

O aluno 10 se confundiu no enunciado, pois quando fala na questão 'números inteiros' ele parece ter entendido inteiros consecutivos, pelo que foi demonstrado, tanto no seu desenho, como nos cálculos realizados, se apropriou ou inventou tal termo que não existem na questão. Daí em diante, o aluno se perdeu totalmente no restante da questão. Considerou vértices como se fossem lados e os somou para determinar o perímetro.

Os alunos 02, 05, 07, 11, 12, 15, 16, 17 e 18 consideraram os vértices do triângulo como lados e os somaram para achar o perímetro, embora o enunciado da questão fosse claro: 'Junto a cada vértice aparece o produto dos comprimentos dos lados a ele adjacentes'. A grande quantidade de alunos que incidiram no mesmo erro, indica a dificuldade de leitura e interpretação de texto, inclusive texto matemático o que corrobora a classificação como dificuldade de linguagem.

O aluno 01 deixou a questão em branco, mas fez uma breve referência, na parte dos comentários, de como se determina o perímetro de um polígono. Quando escreveu somente 'soma dos lados', mostrou que sabia como encontrar o perímetro, mas não como determinar os lados do triângulo, talvez por não entender o enunciado ou por falta de conceitos prévios tais como sistema de equações do 1º grau ou múltiplos comuns, para aplicá-los na questão. O referido aluno demonstrou domínio parcial de conteúdos.

Não se classificou o que fez o aluno 06 em nenhum tipo de erro, pois ele deixou o espaço reservado para os cálculos em branco, mas no questionário respondeu, de maneira que pode ser considerada correta, da seguinte forma: 'Eu procuraria saber os múltiplos comuns de cada número e os somaria p/ saber o perímetro'. Não mencionou por que razão não resolveu a questão, talvez tenha sido pelo fato de que não tinha certeza a respeito do que havia respondido no questionário ou pela demora em encontrar os múltiplos comuns. Como o aluno escreveu corretamente o que era para ter sido feito a fim de resolver a questão, não se pode identificar e, posteriormente, classificar qual foi o erro cometido.

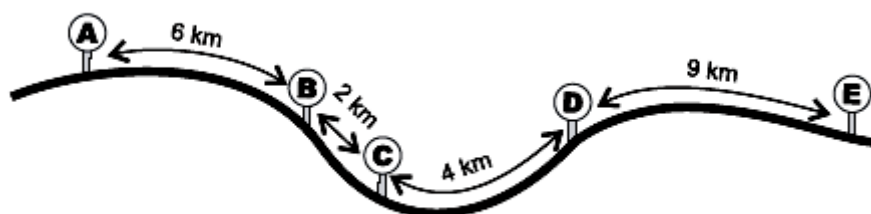
Os procedimentos envolvidos para resolver esta questão, descritos nos dois últimos parágrafos, mostram se houve ou não domínio de alguns tópicos por parte dos alunos, independentemente de eles terem chegado ao resultado esperado.

Numa questão de múltipla escolha, tal domínio seria mascarado por uma resposta incorreta.

Uma vez que o formato múltipla escolha encoberta o processo para se chegar a algumas respostas, seria impossível para um professor utilizar os erros ou acertos nesta questão como base no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos envolvidos.

### 3.7 QUESTÃO 06 DE 2007:

*José e seus parentes moram em algumas das cidades A, B, C, D e E, indicadas no mapa com as distâncias entre elas. Ele saiu de sua cidade e viajou 13 km para visitar seu tio, depois mais 21 km para visitar sua irmã e, finalmente, mais 12 km para ver sua mãe. Em qual cidade mora a mãe de José?*



Esta questão estava presente na prova do nível 2 como também na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, um acertou a questão, sete deixaram-na em branco e dez erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-7 da dissertação.

#### **Erros devido a dificuldades na linguagem:**

Os alunos 12, 14 e 16 erraram na justificativa, mas acertaram a resposta. Tiveram problemas na interpretação do enunciado da questão, pois em um trecho do

enunciado pede para se percorrer uma determinada distância e depois 'mais' outra, e não somar distâncias, o que pode ser verificado pela resposta do aluno 16 à entrevista: 'José mora na cidade E e somei 13 mais o 8 que deu 21 no ponto A', quando era para ter percorrido 13 km (distância entre duas cidades) e depois 'mais' 21 km.

Os alunos 05, 15 e 17 deram justificativas erradas, semelhantes às dos colegas já citados anteriormente. No entanto, estes três erraram a resposta da questão por falta de atenção no último momento, quando foram somar os valores finais das distâncias. O aluno 05 foi o único a afirmar no questionário que não tinha entendido o enunciado.

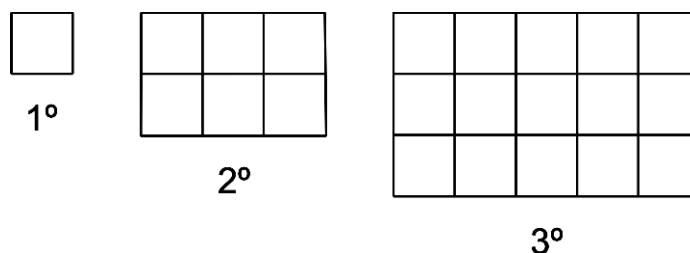
Os alunos 01, 04, 06 e 10 acertaram a resposta, mas também erraram a justificativa, porém não fizeram como os colegas citados nos parágrafos anteriores. Cometeram erros na interpretação do enunciado por falta de atenção ou concentração e desprezaram as distâncias percorridas quando mudaram de posição (cidade). Esses erros foram observados nas soluções dos alunos 01, 04 e 06 e na resposta do aluno 01 à entrevista: 'Primeiro pensei que José morasse na cidade 'E' p/ ir à casa do tio 'C', voltei na cidade 'E' p/ ir até a casa de sua irmã 'A'. Ao invés de eu voltar na cidade 'E' de novo, eu continuei na casa 'A' para ir até a casa da mãe (para dar 12 km)'. Os alunos entenderam que José teria de voltar à casa de origem para percorrer a segunda distância e não perceberam que, na volta, estaria percorrendo mais alguns quilômetros.

As maiores dificuldades encontradas pelos alunos nesta questão foram de interpretação do texto e de obedecer a seqüência dos passos propostos. Vale ressaltar que se esta questão estivesse no formato de múltipla escolha, sete dos dez alunos que tentaram resolvê-la, teriam acertado a resposta, embora tivessem cometido erros de interpretação e de raciocínio e suas justificativas estivessem erradas.

Novamente, reafirma-se que numa questão de múltipla escolha seria impossível perceber tais erros, pois eles ficariam mascarados pela resposta correta. Portanto, no processo de ensino-aprendizagem não teria significado algum, uma questão como essa vinculada à múltipla escolha, tanto para alunos e principalmente, para que os professores pudessem minimizar e trabalhar com os erros e com os conteúdos exigidos na questão em sala de aula.

### 3.8 QUESTÃO 04 DE 2008:

Com os quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma seqüência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa seqüência. Qual é o perímetro do 100º retângulo dessa seqüência?



Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, quatro acertaram a questão, sete deixaram-na em branco e sete erraram ou não concluíram a questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-8 da dissertação.

#### **Erros devido a dificuldades na linguagem:**

Os alunos 01, 10, 15 e 17 interpretaram errado o enunciado e não o desenho. Todos utilizaram o mesmo raciocínio nas suas resoluções. A questão pede para acrescentar uma linha e duas colunas a um primeiro retângulo, o qual contém uma linha e uma coluna, até chegar ao centésimo retângulo. O problema é que os alunos não observaram que a partir da figura, teriam que iniciar o processo. Consideraram erroneamente que o primeiro retângulo possuía uma linha e nenhuma coluna. Dessa forma, generalizaram o raciocínio e obtiveram o centésimo retângulo, com cem linhas e duzentas colunas, o que pode ser observado na resolução do aluno 10. Provavelmente, os alunos não exploraram as figuras existentes na questão. Encontraram uma coluna a mais, e erraram na hora de calcular o perímetro. Mas, por outro lado, demonstraram conhecer o conceito de perímetro.

Os alunos 12 e 14 tiveram interpretações parecidas e erradas do enunciado e do desenho, consideraram que o centésimo retângulo fosse um quadrado com cem colunas e cem linhas.

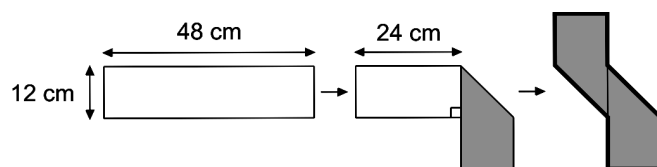
O aluno 04 enxergou corretamente que o primeiro retângulo só tinha uma coluna, ou seja, acertou a quantidade de colunas, mas errou, por desatenção, quando considerou que a quantidade de colunas era igual à quantidade de linhas, pois as linhas e as colunas não aumentavam nas mesmas proporções.

Todos os alunos cometeram erros na mesma classificação. Pensa-se que a principal causa dos erros nesta questão foi a dificuldade que os alunos tiveram em associar a linguagem corrente (enunciado) ao desenho e depois traduzir para uma linguagem matemática a seqüência que elaboraram. Houve pouca exploração dos desenhos, pois dos dezoito alunos participantes da pesquisa, apenas quatro deram continuidade na elaboração da seqüência dos retângulos a fim de validarem seus raciocínios, e destes quatro, dois acertaram a resposta. Vale destacar então a importância da utilização de desenhos nas resoluções de questões e no processo para obter uma expressão matemática para a seqüência. Embora a questão fosse de geometria, o aluno poderia utilizar a passagem para expressão algébrica.

Parece que a maioria dos estudantes tem medo de lidar com desenhos e gráficos, por isso os utilizam pouco no momento em que deveriam explorá-los para facilitar e auxiliar na resolução de questões. Este problema pode ser minimizado se os professores derem mais atenção a questões que desenvolvam essas habilidades em seus alunos durante os primeiros anos de escolarização.

### 3.9 QUESTÃO 08 DE 2008:

*Uma tira retangular de cartolina, branca na frente e cinza atrás, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é o perímetro desse polígono?*



Esta questão estava presente somente na prova do nível 3 da OBMEP. Dos dezoito alunos que compõem esta amostra, nenhum acertou a questão, sete deixaram-na em branco e onze erraram ou não concluíram a questão.

A questão pede para encontrar o perímetro de uma tira retangular de cartolina depois de ser dobrada algumas vezes formando um polígono de oito lados, conforme os desenhos apresentados na questão. Todas as resoluções dos alunos, bem como seus desenhos encontram-se no anexo H-9 da dissertação.

### **Erros devido a uma aprendizagem deficiente de pré-requisitos:**

O aluno 09 foi o único a aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras em dois dos lados da figura, mas cometeu um erro de falta de atenção ou de manipulação de algoritmos quando fazia a fatoração de um número. Ele dividiu e também somou errado.

Os erros cometidos por este aluno necessariamente não significam que ele errou a questão por completo, pois foi o único que aplicou os conteúdos exigidos e interpretou tanto o enunciado como o desenho de forma correta. Se esta questão estivesse originalmente no formato de múltipla escolha, este aluno talvez errasse a resposta. Da forma como foi aplicada (discursiva), consideraria que o aluno, em parte, acertou a questão.

Os alunos 02, 04, 05, 06, 07, 13 e 17 interpretaram o enunciado e o desenho corretamente, ou seja, eles sabiam que tinham que encontrar o perímetro, entenderam quais eram os lados do polígono após todas as dobras na tira retangular, e também encontraram corretamente as medidas de seis dos seus oito lados. O problema ocorreu no momento de identificar que deveriam aplicar o Teorema de Pitágoras em dois dos lados da figura. Nenhum dos alunos acima enxergou isso. Pela resposta à entrevista do aluno 05, é possível ver que tais medidas foram encontradas de forma puramente visual ou por comparação: 'Eu achei que era 14 cm porque um lado tinha 12 cm, e tinha um outro que era um pouco maior eu acho uns 2 cm então deu 14 cm'.

Com base no raciocínio usado pelos alunos para resolverem a questão, chega-se à conclusão de que eles, muitas vezes trazem para a sala de aula um

'saber' que ainda está em um nível muito impreciso. Sendo que essa é a uma das formas que eles encontram para resolver problemas no dia-a-dia. Como todos os alunos desta pesquisa são de ensino médio; entende-se que a escola precisa prepará-los para o exercício da profissão, sendo que essa é uma de suas finalidades como consta em todo momento nos PCN e principalmente na Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB) no segundo inciso do artigo 35. Isso exige, em muitos casos; abstração, precisão de raciocínio, de cálculos, etc. Vê-se a necessidade de se trabalhar em sala de aula a fim de que os alunos percebam que tal precisão é uma importante contribuição da matemática para suas vidas profissionais.

### **Erros devido a dificuldades para obter informação espacial:**

Os alunos 12, 14 e 16 se enganaram na interpretação das dobras dos desenhos, e com isso realizaram a soma dos lados com as medidas erradas, mas mostraram que entenderam que deveriam encontrar o perímetro da figura e como isto seria feito.

Nesta questão, se verifica a exigência e a aplicabilidade do conhecimento de vários conteúdos, sendo que o principal foi o Teorema de Pitágoras, costumeiramente trabalhado em sala de aula, e com aplicações distintas para os níveis de ensino fundamental e médio. Mas mesmo sabendo que a maioria dos alunos conhece e sabe enunciar o teorema, dos dezoito alunos apenas um conseguiu visualizar sua aplicação.

Se esta questão estivesse sendo trabalhada em uma aula como um exemplo de aplicação do Teorema de Pitágoras ou se fosse indicado qual conteúdo deveria ter sido aplicado para resolvê-la; possivelmente a maioria dos alunos teria acertado a questão, pois a grande dificuldade que muitos estudantes encontram é no momento de escolher quais conteúdos devem ser aplicados nas resoluções das questões. Isso indica, então, a importância de atividades que envolvam mais de um conteúdo matemático para que os alunos 'investiguem' quais formas de resolução podem ser aplicados nas questões e consigam utilizar conceitos aprendidos previamente em momentos diversos e não somente quando estão sendo estudados.

Para justificar melhor essa assertiva, acredita-se ser oportuno descrever um comentário que o filho do autor, aluno do 9º ano de uma das melhores escolas particulares do município de Nova Iguaçu, segundo resultados do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), com treze anos de idade, fez durante o desenvolvimento desta pesquisa e sem saber do que ela tratava. Antes de tirar dúvidas sobre uma questão de geometria plana que não era da OBMEP e sim do livro didático usado em seu colégio, afirmou que a questão era muito difícil, foi perguntado por qual razão ele achava isso e ele respondeu da seguinte forma: ‘pai, é muito chato quando tem que usar um monte de coisas pra resolver uma questão’, se referindo, é claro, à quantidade de conteúdos diferentes usados para resolvê-la. Este comentário reforça a conclusão feita no parágrafo anterior: de que é muito difícil para os alunos aplicarem vários conteúdos para a resolução de uma mesma questão.

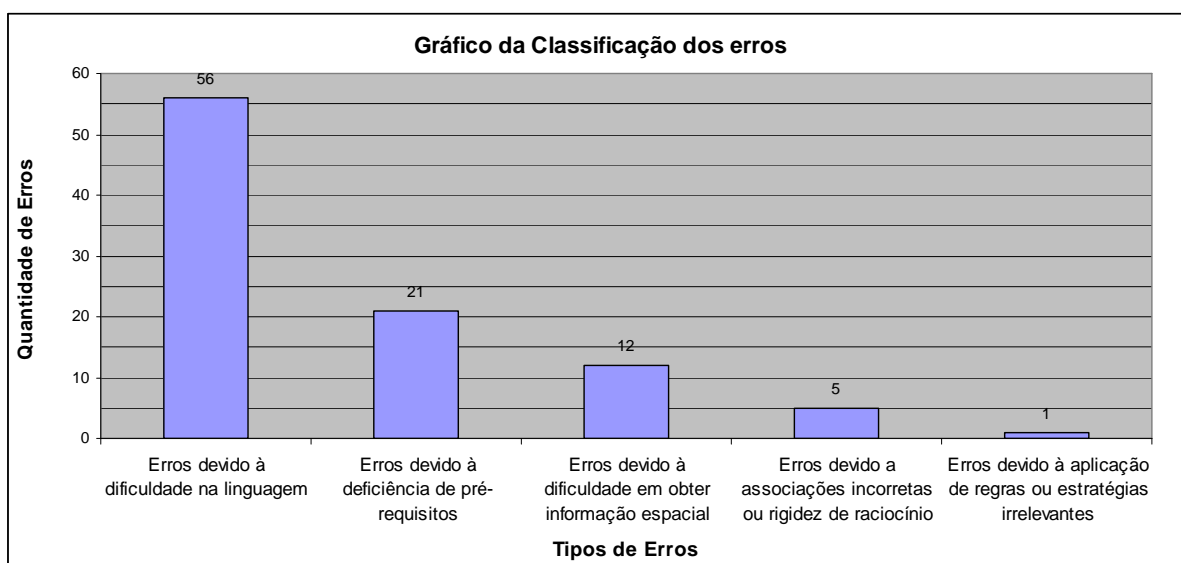


Gráfico 1: Classificação de erros

Depois de analisar e classificar as resoluções de cada aluno nas questões, obteve-se um total de 96 erros. Os dados do gráfico 1 mostram que os erros referentes a dificuldades na linguagem correspondem a 59%. Essa evidência pode indicar a deficiência dos alunos em interpretar textos, em seguir passos do enunciado e passar da linguagem corrente para linguagem matemática, inclusive em textos simples como foi percebido durante a análise e pelo comentário de um dos alunos ‘*Essas provas deveriam ter linguagens mais claras, porque na sala a gente aprende de uma maneira bem mais simples*’.

Os erros devido à deficiência de pré-requisitos (22%) e em obter informação espacial (13%), juntos foram responsáveis por 35% dos erros. Esses erros podem indicar a falta de uma seqüência de trabalho, de um planejamento que vise um trabalho progressivo entre séries, ou seja, um professor inicia o trabalho com geometria em um determinado ano letivo e outro profissional o interrompe. Os conteúdos deixam de ser trabalhados ou caem no esquecimento o que causa uma reação de 'medo', nos alunos, quando trabalha-se com desenhos e gráficos em sala de aula.

Credita-se os 6% restantes dos erros a associações incorretas ou rigidez de raciocínio e à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes a falta de atenção dos alunos por causa da pouca ocorrência dos mesmos.

Os resultados demonstrados no gráfico reforçam as conclusões e sugestões realizadas ao longo desta seção em cada questão.

## **4- CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **4.1- as questões de geometria da OBMEP**

Os resultados obtidos na pesquisa reforçam as conclusões feitas em cada questão e sugestões de trabalho em sala de aula que serão realizadas nesta seção. Mas, em particular se defende, antes de qualquer coisa, que sejam destinados tempos de aula, não professores, exclusivos para geometria e o trabalho com desenho geométrico desde as séries iniciais. Tal necessidade foi sentida também por doze alunos, através de comentários (anexo I da dissertação) como: '*Preciso de reforço para geometria para melhorar meu desempenho*', ou por pedidos de aula de reforço de geometria e pelo posicionamento de alunos que reclamaram não estudar o assunto.

Dois comentários chamaram mais a atenção, o que já era percebido antes mesmo desta pesquisa: '*Deveríamos fazer aula da disciplina geometria separada da matemática. Tem uma carência muito grande em geometria poderíamos ter aulas de*

*reforço para melhor desempenho’ e ‘Nós temos professores de matemática não de geometria. Deveriam preparar a gente melhor para essas provas’.*

No ensino básico, a geometria plana não é uma disciplina específica do currículo de matemática. Mas devido a sua fundamental importância, sob o ponto de vista histórico, teórico e aplicativo, torna-se necessário que o professor de matemática seja estimulado a incluí-la, pelo menos, no início do terceiro bimestre e não deixá-la para o fim do ano letivo, como muitos profissionais fazem. O que ocorre é que, em muitos casos, o professor chega ao final do ano sem concluir todo o conteúdo proposto, seja pela falta de tempo ou pela falta de domínio do assunto. Infelizmente, o resultado da pesquisa da análise das questões da OBMEP foi mais um dado que ratificou o descaso com a geometria e suas conseqüências, quando se verifica o baixo desempenho dos alunos nos exames aos quais são submetidos como: IDEB, Prova Brasil e Nova Escola (somente no Estado do Rio de Janeiro).

As dificuldades dos alunos já ficaram evidentes logo no início da pesquisa quando foram aplicadas vinte oito questões e apenas nove foram selecionadas, ou seja, dezenove questões tiveram pouca produção escrita, conforme pode ser visto nos anexos C e C-1 da dissertação.

A questão 02 de 2005 exigia muita atenção na interpretação devido a vários procedimentos a serem seguidos, abstração geométrica e conhecimento de área do retângulo. Dos dezoito alunos participantes doze tentaram resolver, três acertaram e nove erraram. Cinco alunos cometeram erros referentes à dificuldade na linguagem, isto mostra a deficiência que têm em seguir passos e procedimentos e a necessidade de se apoiar no concreto, pois durante a prova tentaram realizar as etapas, referentes às dobras, na folha de prova. Três alunos cometeram erros referentes à deficiência de pré-requisitos, ao não se lembrarem da fórmula da área do retângulo. Talvez pela falta de um trabalho contínuo com geometria. Houve também um erro referente à aplicação de regras, pois o estudante utilizou a fórmula da área do triângulo no lugar da área do retângulo.

Também foi observada a troca da definição de retângulo pela do triângulo, ou seja, foi utilizado o desenho de um triângulo em vez de um retângulo, erro ‘assustador’ para ser cometido por um aluno do ensino médio. Estas deficiências podem ser minimizadas com o trabalho de geometria de forma concomitante com álgebra e aritmética e com a utilização de figuras e representações geométricas.

É interessante que o professor se preocupe em oferecer questões e atividades que envolvam abstração, e as gradue de acordo com cada ano de escolaridade. Assim, o aluno poderá ser capaz de resolver problemas que envolvam geometria sem ter a necessidade de buscar excessivo apoio no concreto, pois nesse nível de escolaridade, o aluno já deve ter condições de abstrair.

Na questão 03 de 2005 foram cobrados conhecimentos de transformações de unidades de comprimento e de tempo e conteúdos referentes aos lados e aos ângulos do triângulo equilátero. Mesmo a cobrança sendo feita sobre conhecimentos básicos de geometria, nenhum aluno acertou a questão, oito não tentaram e dez erraram. A questão tem enunciado simples e de fácil entendimento, mas mesmo assim, sete alunos cometeram erros devido à dificuldade na linguagem, dois de associações incorretas e um em obter informação espacial. Os dez alunos entenderam que teriam de transformar as unidades; apenas um que entendeu o enunciado e não interpretou o desenho corretamente, chegou perto de utilizar os conhecimentos sobre triângulos equiláteros, por isso não se pode afirmar se saberiam ou não aplicar tais conhecimentos.

Os conteúdos cobrados na questão 08 de 2005 são: de menor distância e o Teorema de Pitágoras, o enunciado é objetivo, claro e com poucas etapas, talvez por isso apenas um aluno tenha cometido erro de dificuldade na linguagem, acredita-se que por falta de atenção e não por dificuldade de interpretação. Os conteúdos cobrados são trabalhados costumeiramente em sala de aula, mas pela análise dos nove erros e considerando que sete foram em deficiência de pré-requisitos, credita-se o problema à dificuldade que os alunos têm em definir qual conteúdo deve ser aplicado.

Na questão 17 de 2005 deveria ser aplicado duas vezes o teorema de Pitágoras e depois analisar a diferença entre os resultados. Dos dezoito alunos, sete deixaram em branco, um acertou e dez erraram. Os dez erros foram referentes a dificuldades na linguagem, mas alguns também em obter informação espacial, ou seja, com as duas classificações. Isto porque a questão exigia um desenho para a primeira vez que deveria ser aplicado o teorema de Pitágoras e outro desenho, que deveria ser feito pelo aluno, para segunda aplicação. Vale ressaltar que todos acreditavam ter entendido completamente o enunciado.

Na questão 04 de 2006 foi cobrado apenas o conhecimento da medida do ângulo raso e pouca interpretação do enunciado, pois continha um texto simples de

duas linhas e dois desenhos mostrando as etapas a serem seguidas para que os alunos pudessem se apoiar para resolvê-la. O nível de cobrança da questão era baixo para alunos de ensino médio, inclusive porque ela estava presente também na prova dos oitavo e nono anos de escolaridade. Considera-se que esta foi a questão mais simples da pesquisa, porém teve apenas dois acertos e incríveis oito erros, todos em obter informação espacial. Todos os erros tiveram mais de uma classificação. Cinco alunos se equivocaram na interpretação, mas mostraram conhecer o valor do ângulo raso e como se opera com ângulos suplementares, portanto manifestaram dificuldade na linguagem, dois alunos apresentaram deficiência em conceitos prévios e um que cometeu os três tipos de erros.

As maiores exigências da questão 05 de 2006 são de assuntos como números inteiros, múltiplos e sistemas de equações, referentes à álgebra e aritmética, por isso poderia não considerar esta questão como de geometria, mas como a pergunta era sobre o perímetro do triângulo a incluí na pesquisa. Após a análise nota-se que a maior dificuldade dos alunos foi em encontrar os lados do triângulo, pois os quatorze que tentaram resolver a questão sabiam como encontrar o perímetro, pelo que ficou demonstrado nos comentários. Onze alunos cometeram erros de dificuldade na linguagem, um de conceitos prévios e associações incorretas e apenas dois encontraram os lados do triângulo e acertaram a questão.

Todos os dez erros da questão 06 de 2007 foram classificados como de dificuldade na linguagem. A questão estava presente na prova dos alunos do nível 2 e 3 e tinha como única cobrança o conteúdo de distância. Tal questão poderia ser considerada a mais simples da pesquisa, mas não a foi considerada desta forma devido a: necessitar da realização de vários procedimentos e pelo fato de que os números, da pesquisa em geral e principalmente nesta questão, comprovam a dificuldade que os alunos encontram em interpretar enunciados deste tipo.

Causou surpresa que a questão 04 de 2008, que considerava uma das mais difíceis da pesquisa, devido a várias etapas, fosse, com quatro acertos, a que os alunos mais acertaram. Os sete erros cometidos foram de dificuldade na linguagem. A questão cobrou apenas perímetro do retângulo como conteúdo e exploração dos desenhos. A dificuldade encontrada pelos alunos foi em associar a linguagem corrente aos três desenhos oferecidos e transformarem em linguagem matemática para darem continuidade à seqüência proposta. Houve pouca exploração dos desenhos, pois nenhum aluno que errou a questão os utilizou e

apenas dois dos que acertaram parecem tê-los utilizado para validar seus raciocínios. Conclui-se a partir das dificuldades encontradas pelos alunos como é importante a utilização de desenhos e gráficos.

A questão 08 de 2008 cobrou como conteúdo, novamente, o Teorema de Pitágoras e o perímetro de um polígono. Oito erros foram devidos a uma aprendizagem deficiente de pré-requisitos, ou seja, na manipulação de algoritmos ou na identificação de que conteúdo matemático deveria ser aplicado. Três alunos tiveram dificuldade em obter informação espacial, pois não entenderam as etapas realizadas nos desenhos e nenhum aluno acertou a questão.

Pode-se utilizar um exemplo que aconteceu nesta pesquisa e que acontece no dia-a-dia. Numa das questões precisava ser usado o Teorema de Pitágoras, mas apenas um aluno enxergou sua aplicação depois que o professor disse o que era para usar veio a reação 'só isso'.

A seguir, são expostas algumas das conclusões gerais a respeito da pesquisa efetuada, mas que se baseiam também na prática docente do autor da dissertação; professor de matemática da rede pública, interessado na melhoria do ensino de matemática, particularmente do ensino de geometria e na possível inclusão de seus alunos no processo de premiação da OBMEP, pois sabe que a realidade de seus alunos é parecida com a de muitos outros estudantes que freqüentam escolas públicas em grandes centros urbanos.

#### **4.2- conclusões gerais**

A maior quantidade de erros analisados recaiu sobre a dificuldade de linguagem (59%). Melhoraria essa deficiência se o professor propusesse uma maior utilização em sala de aula de 'problemas de aplicação' que "requerem mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática adequada de modo que se possam identificar e utilizar os algoritmos apropriados para a resolução dos mesmos" Buriasco (2002, p.261).

Uma preocupação surgiu em relação à formulação das questões da OBMEP para seleção dos alunos para segunda fase, pois a pesquisa ressaltou que os alunos realizaram os cálculos errados e chegaram à resposta correta, mesmo sem as alternativas e sem concluir a resolução. Verificou-se que grande parte dos alunos acertaria a resposta da questão, se ela estivesse no formato múltipla escolha,

mesmo que os procedimentos e justificativas estivessem errados. Este formato mascara e encobre os erros cometidos, tornando a seleção para a segunda fase pouco confiável, com o agravante de que é impossível que um professor possa utilizar os erros ou acertos como base no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos envolvidos.

Em relação à análise de erro como instrumento para a aprendizagem tem-se que, quando o aluno “erra” ele está, na verdade, pondo em ação seus conhecimentos prévios, testando hipóteses e possibilidades e esperando do professor *feedback*, positivo ou não, para que continue utilizando as habilidades já construídas ou opte por usar outros conhecimentos apresentados por seu professor. Este, por sua vez, precisa estimular a capacidade de seus alunos em construir e expor seu próprio conhecimento, organizando suas estratégias, criando e testando hipóteses. Dessa forma, o docente terá maiores chances de fazer com que seus alunos entendam que a matemática não é tão difícil como é estigmatizada.

A pesquisa ratifica a importância de o professor aprender a: identificar os diferentes tipos de erros cometidos pelos alunos, distinguir qual a natureza de cada um desses erros, bem efetuar ações para explorá-los a fim de minimizar as deficiências no aprendizado e fazer com que os alunos entendam seus erros e como podem saná-los. Entende-se também que a exploração dos erros deve servir para o aperfeiçoamento do professor, seja na sua metodologia de ensino, assim como despertar a necessidade de testar seus conhecimentos matemáticos.

## **5- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BERTONHA, R. A. **O ensino de geometria e o dia-a-dia na sala de aula.** 1989. Dissertação de Mestrado. Campinas. SP. Faculdade de Educação.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática:** ensino de primeira a quarta séries. 3. ed. Brasília, 2001.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática:** ensino de quinta a oitava séries. Brasília, 1998.

BURIASCO, R. L. C. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas dos alunos e professores. Marília, 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Marília. 1999.

\_\_\_\_\_. Algumas considerações sobre avaliação educacional. In: **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 22, jul./dez. 2000.

\_\_\_\_\_. Sobre a avaliação em matemática: uma reflexão. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 7, n. 36, dez. 2002.

CASTILLO, S. F. R (1989) “**Geometria – até onde a vista alcança**”. Revista AMAE Educando. 203, p.24-26. Belo Horizonte.apud KALEFF, A. M. (1994) **Tomando o Ensino de Geometria em nossas mãos**. A Educação Matemática em Revista, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ano I, nº2 p.19-25.

CENTRO de Informações e Dados do Rio de Janeiro (CIDE). Rio de Janeiro. Disponível em <[http://www.cide.rj.gov.br/cide/divisao\\_regional.php](http://www.cide.rj.gov.br/cide/divisao_regional.php)>. Acessado em: 04 de abril de 2009.

CRESWELL, J. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 10a. edição. São Paulo: Cortez, 1998.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores**. Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, Brasil: SBEM. 2006.

DALTO, J. O. **A Produção Escrita em Matemática: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002**.101 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 4ª ed. Campinas, SP: Papyrus, 1998.

\_\_\_\_\_. Desafios da educação matemática no novo milênio. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, Ano 8, n. 11, dez. 2001.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Atlas, 2005.

DRUCK, S. Um pouco da OBMEP. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**. Rio de Janeiro, Nº 68, p. 96-99, 2009.

ESTEBAN, M. T. **Avaliar**: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/0611t.htm>.> Acesso em: 10 maio 2002.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. Revista Zetetiké, Campinas, ano 3, n. 4. 1995.

HADJI, C. **A avaliação regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto Editora, 1994.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições**. São Paulo: Cortez, 12. Edição. 2002.

LUCKESI, C. C. Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. In: LUCKESI, C. C. **A construção do projeto de ensino e a avaliação**. São Paulo: FDE, 1990. (Série Idéias, n.9).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

\_\_\_\_\_. **Normas para avaliação em matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1999.

OLIMPÍADA Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Rio de Janeiro. Disponível em <[www.obmep.org.br](http://www.obmep.org.br)>. Acessado em: agosto de 2008.

OLIVEIRA, D. S. **Desigualdades Sócio-Espaciais e Vulnerabilidade Juvenil no Contexto Metropolitano: o Caso da Cidade de Nova Iguaçu**. 2006. 274 p.

Dissertação (Mestrado em Estudos Populacionais e Pesquisas Sociais, área de concentração, Produção e Análise da Informação Geográfica) da Escola Nacional de Ciências Estatísticas (Ence), Rio de Janeiro, 2006.

ONUCHIC, L. de la R, ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. e BORBA, M.(org.) Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PAVANELLO, R. M. **O abandono de ensino de geometria: uma visão histórica.** 1989. 196 p. Dissertação de mestrado. Unicamp. Campinas. SP. Faculdade de Educação.

PAVANELLO R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil.** Revista Zetetiké. Ano 1, no. 1. 1995.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.** 2001. 84 p. Dissertação de Mestrado. PUC-SP 2001. Faculdade de Educação.

PINTO, N. B. **O Erro como Estratégia Didática.** Campinas: Papirus, 2000.

RADATZ, H. **Error Analysis in Mathematics Education.** Journal for Research in Mathematics Education v.10, n.2, p. 163-172. Maio, 1979.

RIVERO, C. M. L.; GALLO, S. Apresentação. In: RIVERO, C. M. L.; GALLO, S. **A formação de professores na sociedade do conhecimento.** São Paulo: EDUSC, 2004.

SEGURA, R. O. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática.** 2005. 178 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

SILVA, M. C. N. **Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática.** 123 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

VIANA, O. A. **O Conhecimento Geométrico de Alunos do CEFAM sobre figuras Espaciais: Um estudo das habilidades e dos níveis de conceito.** Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Educação, 2000.