

**Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica**  
**Área de Concentração: Matemática**

ALEX DE BRITO COELHO

**Produto Final da Dissertação apresentada à  
Universidade do Grande Rio Prof. José de  
Souza Herdy em 14 de outubro de 2010:  
Teorema de Pitágoras: Qual a sua importância  
para o ensino das Ciências da Natureza?**

# 1 INTRODUÇÃO

A dissertação, por nós desenvolvida, pretendeu mostrar a importância do Teorema de Pitágoras no ensino das ciências, notadamente no ensino de Matemática. Nesse sentido, foram explorados os seguintes aspectos: o itinerário histórico do Teorema de Pitágoras dentro da geometria; algumas demonstrações deste teorema; algumas de suas aplicações na Matemática, na Física e na Biologia, e o breve relato de uma experiência em sala de aula com dois grupos de alunos, sendo trabalhadas duas diferentes formas de demonstrar o teorema.

Como produto final da dissertação apresentada, destacamos seu terceiro capítulo onde são apresentadas algumas das aplicações do Teorema de Pitágoras nas Ciências da Natureza, com destaque para o campo da Matemática e suas ramificações, como Geometria Plana, Analítica e Espacial, e fora dela também, mencionando suas aplicações na Física e na Biologia. Nossa finalidade é ressaltar que o ensino do Teorema de Pitágoras se justifica também pela importância de sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, além da Matemática, especialmente nas ciências.

## 2 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

*“Desde que Pitágoras provou aquele que talvez seja o teorema mais importante da Matemática, essa disciplina tem tido uma perspectiva bem clara do que está tentando realizar. Pitágoras sabia, como se sabia desde o tempo dos egípcios, que alguns dos triângulos clássicos eram triângulos retos, tal como o triângulo de lados 3, 4 e 5. Percebendo que  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , ele pôde generalizar isso para mostrar que, num triângulo reto, o quadrado da hipotenusa era igual à soma dos quadrados dos dois lados restantes. Ele tinha consciência do que queria provar e, quando o provou, tinha consciência do que possuía”.*

(STEIN, 1000, p.47)

Para onde levou o Teorema de Pitágoras? Qual a sua consequência mais importante? Essas perguntas têm não uma única resposta. Talvez uma de suas mais importantes consequências tenha sido a descoberta de números que não podiam ser escritos como a razão de dois inteiros - os números irracionais. Por exemplo; quando o Teorema de Pitágoras é aplicado a um triângulo retângulo e isósceles de catetos iguais a um, o resultado é um número que não possui uma quantidade finita de casas decimais.

Como poderia um número representado por infinitas casas decimais, que não possui um padrão de comportamento ou repetição, servir para medir um segmento? Como entender e conciliar o finito e infinito? Como pensar uma quantidade que não tem fim? É certo que, sempre que se pensa em um número, pode-se somar uma unidade e assim obter um número maior ainda do que ele. Mas, da pura abstração humana, Pitágoras gerou um fato concreto: não se pode medir o comprimento da diagonal de um quadrado de lado um. Esse fato concreto, adicionado à abstração, levou a buscar o infinito em outros campos e também em outras áreas.

Se  $a$  é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo e  $b$  e  $c$  são os comprimentos de seus catetos, então  $a^2 = b^2 + c^2$ . Eis em linhas gerais o Teorema de

Pitágoras. Isso já foi demonstrado de diversas formas diferentes em capítulos anteriores. Mas é só isso? Claro que não!

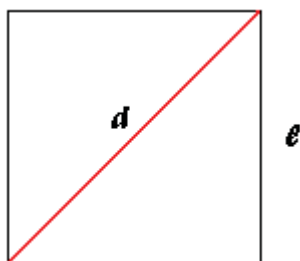
O Teorema de Pitágoras vem sendo utilizado por diversos campos da Matemática e inclusive fora dela. Por tal motivo é de grande importância que o aluno de nono ano do ensino fundamental e qualquer outro aluno do ensino médio saiba utilizar bem esta ferramenta em diferentes contextos. Diversas aplicações são derivadas a partir do estudo do Teorema de Pitágoras. A seguir, é apresentada uma pequena amostra de tal afirmação.<sup>1</sup>

## 2.1 NO CAMPO DA MATEMÁTICA

### 2.1.1. Em Geometria Plana

#### a) Cálculo da diagonal do quadrado

Seja o quadrado de lado  $l$  decomposto em dois triângulos retângulos isósceles pela diagonal  $d$ , conforme a figura abaixo.



Ao aplicar o Teorema de Pitágoras, o aluno observa que:

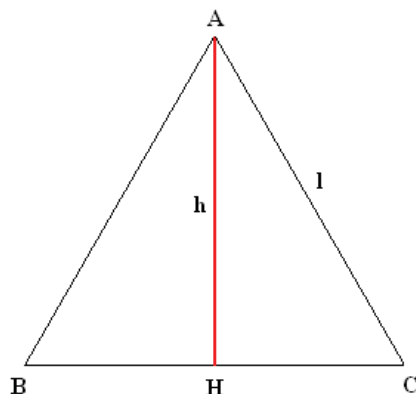
$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2}$ , ou seja, a partir de agora, basta ter conhecimento do comprimento do lado do quadrado para, rapidamente, obter a medida de sua diagonal. Exemplo: Se o lado do quadrado medir 3 cm sua diagonal medirá  $3\sqrt{2}$  cm.

#### b) Cálculo da altura do triângulo equilátero

---

<sup>1</sup> As aplicações em Geometria são baseadas nas obras de IEZZI (1993), MORGADO (2002) e MACHADO (1982).

Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero de lado  $l$  e AH é a altura relativa ao vértice A, de comprimento  $h$ . O triângulo ACH formado é retângulo, de catetos medindo  $l/2$  e  $h$  e sua hipotenusa mede  $l$ .



Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$\rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Em relação a essa segunda aplicação, o aluno pode perceber a facilidade de calcular a altura do triângulo equilátero conhecendo apenas a medida do seu lado.

Exemplo: dado um triângulo equilátero de lado 4 cm sua altura medirá  $2\sqrt{3}$  cm.

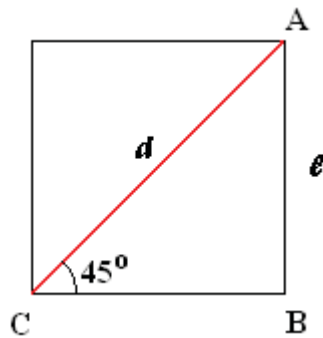
Deste ponto em diante, o aluno também passa a observar que pode calcular a altura de outros polígonos, como retângulo, trapézio; calcular o comprimento das diagonais do losango, conhecendo as medidas dos lados; enfim, há uma infinidade de problemas cuja resolução mais eficaz é feita através da aplicação do teorema de Pitágoras.

O próximo item trata de algumas aplicações na Trigonometria, tais como o cálculo de seno, cosseno e tangente de arcos notáveis, Relação Fundamental da Trigonometria e a Lei dos Cossenos.

### 2.1.2 Em Trigonometria

a) Cálculo do Seno, Cosseno e Tangente dos arcos notáveis ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ )

No triângulo retângulo ABC abaixo, formado a partir de um quadrado, podem ser obtidos os valores de seno, cosseno e tangente de  $45^\circ$ . Observe:

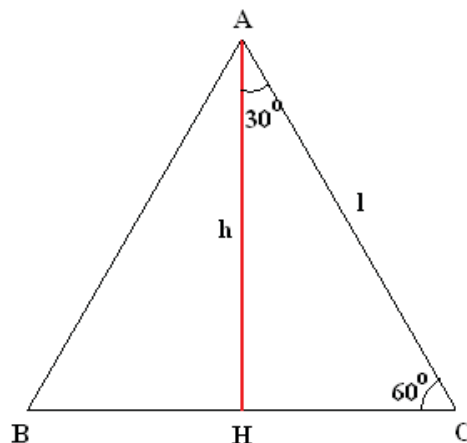


$$\text{sen}45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{1\sqrt{2}} \rightarrow \text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}45^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{1\sqrt{2}} \rightarrow \text{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{1} \rightarrow \text{tg}45^\circ = 1$$

De forma análoga, obtêm-se valores de seno, cosseno e tangente de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , tomando-se, agora, um triângulo equilátero de lado  $l$ :



Após as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo, verifica-se facilmente algumas relações entre as linhas trigonométricas. Por exemplo, se  $a$  e  $b$  são dois ângulos complementares, então  $\text{sen } a = \text{cos } b$  e  $\text{sen } b = \text{cos } a$ . Sendo assim:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{l}{2} \rightarrow \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} = \text{cos } 60^\circ .$$

Da mesma forma,

$$\text{sen}60^\circ = \frac{h}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{cos } 30^\circ .$$

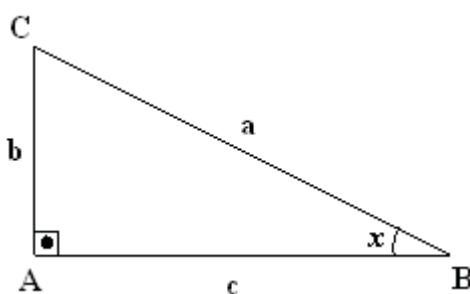
Ainda em relação aos ângulos complementares  $a$  e  $b$ ,  $\text{tga} = \frac{1}{\text{tgb}}$ , logo:

$$\text{tg}30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{tg}60^\circ = \frac{1}{\text{tg}30^\circ} \rightarrow \text{tg}60^\circ = \sqrt{3} .$$

#### b) Relação Fundamental da Trigonometria

Considere o ângulo  $x$  assinalado no triângulo retângulo ABC da figura abaixo.

Como  $\text{sen } x = \frac{b}{a}$  e  $\text{cos } x = \frac{c}{a}$ , então:



$$(\text{sen}x)^2 + (\text{cos } x)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} .$$

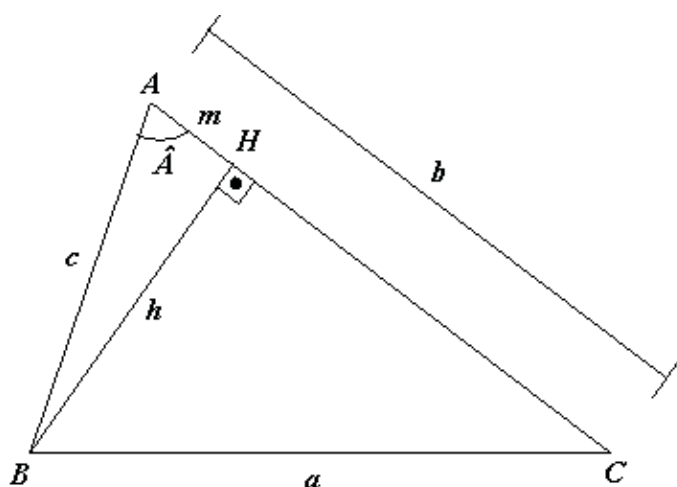
Como, pelo Teorema de Pitágoras,  $b^2 + c^2 = a^2$ , então:

$$\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = \frac{a^2}{a^2} \rightarrow \text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1 .$$

Esta relação acima é muito utilizada em todo o estudo de trigonometria. Outras relações trigonométricas também são obtidas a partir do Teorema de Pitágoras, mas com grau de importância um pouco menor se comparadas com a Relação Fundamental da Trigonometria e são omitidas neste texto.

c) Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer (figura abaixo) e BH a altura relativa ao lado AC. Foram, então, formados os triângulos retângulos ABH e BCH. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras em ambos, obtém-se:



$h^2 + m^2 = c^2$  , no triângulo ABH e  $h^2 + (b - m)^2 = a^2$  no triângulo BCH.

Desenvolvendo a segunda equação:  $h^2 + b^2 - 2bm + m^2 = a^2$  . Como  $h^2 + m^2 = c^2$  , então:  $b^2 + c^2 - 2bm = a^2$  .

Entretanto, do triângulo ABH pode-se escrever que  $\cos \hat{A} = \frac{m}{c} \rightarrow m = c \cdot \cos \hat{A}$  . E substituindo o valor de m na equação anterior,

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} = a^2 .$$

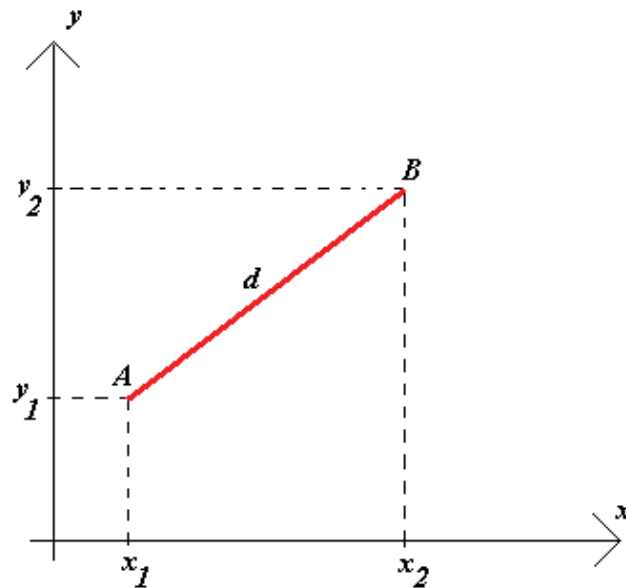
Tal procedimento pode ser repetido para um triângulo obtusângulo e o resultado obtido será exatamente o mesmo, pois o cosseno de um ângulo obtuso corresponde ao simétrico do seu complemento. Esta relação é conhecida como *Lei dos Cossenos* e utilizada não somente na Trigonometria, mas também na Geometria Plana, Geometria Analítica e Espacial e também pela Física, no estudo dos vetores que representam as forças atuantes sobre os corpos.

A seguir serão apresentadas algumas aplicações na Geometria Analítica e na Espacial que envolvem a distância euclidiana entre dois pontos, cálculo do módulo de um vetor, a diagonal do cubo e altura do cone.

### 2.1.3 Em Geometria Analítica

#### a) Distância euclidiana entre dois pontos

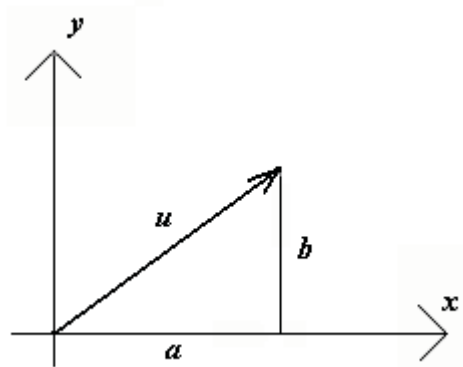
Dados dois pontos A e B do plano cartesiano, pode-se calcular a distância entre eles utilizando-se o Teorema de Pitágoras. Na figura abaixo, pode-se obter um triângulo retângulo prolongando-se o segmento tracejado que determina a ordenada do ponto A até que este encontre o segmento que determina a abscissa do ponto B. Os catetos do triângulo assim formado são  $(x_2 - x_1)$  e  $(y_2 - y_1)$ . Observe:



Pelo triângulo assim formado, tem-se  $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ . E, portanto,  
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

## b) Módulo de um vetor

Seja  $u = (a, b)$  um vetor de  $\mathbb{R}^2$  e seu comprimento pode ser obtido facilmente através da aplicação do Teorema de Pitágoras. Observe:



$$|u|^2 = a^2 + b^2 \rightarrow |u| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vale lembrar que  $|u|$  representa o módulo, ou comprimento, do vetor  $u$ .

Também é possível verificar tal demonstração através do produto escalar, calculado da seguinte forma, segundo Machado (p.16):

*“Chamamos produto escalar (ou produto interno) de dois vetores  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$  do  $\mathbb{R}^2$  ao número real  $x_1x_2 + y_1y_2$ . Indicamos este número pelo símbolo  $u \cdot v$  cuja leitura é  $u$  escalar  $v$ ”.*

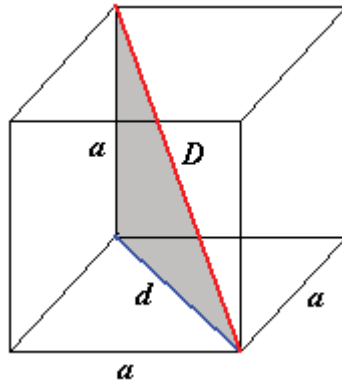
Note que:

$$u \cdot u = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = (|u|)^2 \text{ e, portanto, } |u| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

### 2.1.4 Em Geometria Espacial

#### a) Diagonal do Cubo

Observe, abaixo, o cubo de aresta  $a$ . Chamando de  $d$  a diagonal de qualquer uma de suas faces, já foi mostrado anteriormente que  $d = a\sqrt{2}$  (diagonal do quadrado). No triângulo retângulo destacado, pode-se aplicar o Teorema de Pitágoras. Então:

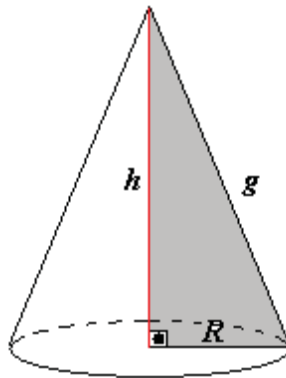


$$D^2 = d^2 + a^2 \rightarrow D^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 \rightarrow D^2 = 3a^2 \rightarrow D = a\sqrt{3}.$$

Ou seja, dado um cubo de aresta  $a$ , sua diagonal é  $a\sqrt{3}$ . Por exemplo, uma caixa d'água cúbica com 1 metro de aresta possui diagonal de comprimento  $1\sqrt{3} \text{ m} \cong 1,73 \text{ m}$ .

#### b) Cálculo da altura do cone

No cone circular reto da figura abaixo, sejam  $R$  o raio da base,  $h$  a altura e  $g$  a sua geratriz. Facilmente observa-se que:



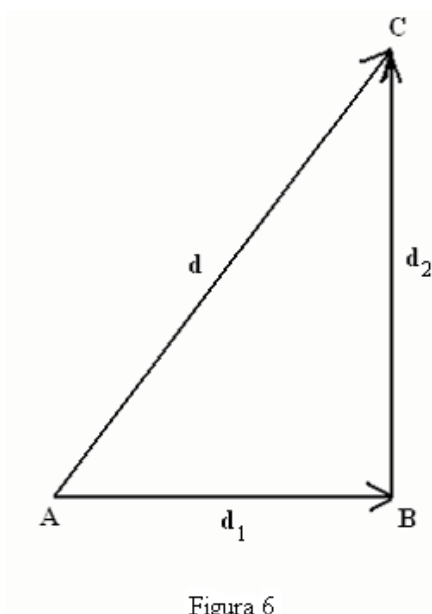
$h^2 + R^2 = g^2 \rightarrow h = \sqrt{g^2 - R^2}$ , o que não chega a ser apresentado como uma *fórmula*, haja vista ser uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras.

A próxima seção trata da aplicação do Teorema de Pitágoras na Física relacionada às grandezas vetoriais.

## 2.2 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NA FÍSICA

Na Física são estudados dois tipos de grandezas: as escalares e grandezas vetoriais. A escalar é aquela que fica perfeitamente caracterizada quando se conhece apenas sua intensidade acompanhada pela correspondente unidade de medida. Como exemplos de grandeza física escalar há a massa de um corpo (por exemplo, 50 kg), a temperatura de um corpo 37°, o volume de um reservatório, 2 m<sup>3</sup>, a energia, 250 J e muitas outras. Nas operações com grandezas escalares, seguem-se as regras de operações algébricas usuais (soma, subtração, multiplicação e divisão), e os cálculos são arredondados, quando necessário (CALÇADA, 1998 p.141).

Quando se lê que “a velocidade do carro no momento da colisão era de 90 km/h”, não se pode afirmar que o mesmo estava rápido ou não, pois tal informação é insuficiente para qualquer conclusão. Isso acontece porque a velocidade é uma grandeza vetorial. Para uma grandeza física vetorial ficar totalmente caracterizada, é necessário saber não somente a sua intensidade (ou módulo), mas também a sua direção e o seu sentido. Por isso são representadas por vetores. E quando se opera com a representação de vetores no plano, a geometria plana se faz necessária. Imagine, por exemplo, um veículo que parte de uma cidade A e sofre um deslocamento no sentido leste ( $d_1$ ), chegando até uma cidade B e, em seguida, se desloca novamente no sentido norte, para chegar até a cidade C ( $d_2$ ).



**Fonte:** CALÇADA, C.S. Física Clássica: Cinemática, 1985, p.143.

Nota-se facilmente que o deslocamento  $d_1$ , de A para B, e o deslocamento  $d_2$ , de B para C, equivalem a um único deslocamento  $d$ , de A para C (figura 6). Desta forma, o deslocamento  $d$  é a soma vetorial ou resultante dos deslocamentos  $d_1$  e  $d_2$ , ou seja,  $d = d_1 + d_2$ . Este resultado é válido para qualquer grandeza vetorial. E para calcular o módulo do vetor resultante (ou vetor soma), basta aplicar o Teorema de Pitágoras, haja vista que os vetores  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d$  formam um triângulo retângulo de catetos  $d_1$  e  $d_2$  e hipotenusa  $d$ . Portanto  $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ .

Ainda segundo Calçada (1998), na página 4, do volume II, a intensidade da força resultante é, por diversas vezes, calculada através da aplicação direta do Teorema de Pitágoras, tendo em vista o triângulo retângulo formado pelas componentes vetoriais. Como cita o autor no exemplo:

*“Um ponto material de massa  $m = 10$  kg está sob a ação de apenas duas forças como mostra a figura. Sabendo que  $F_1 = 12$  N e  $F_2 = 5$  N, calcule o módulo da aceleração do ponto material.(p.14)”*.

A figura a que se refere o autor está disposta logo a seguir.

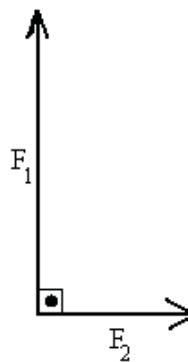


Figura 7

**Fonte:** CALÇADA, C.S. Física Clássica: Dinâmica, 1985, p.14.

A partir dela, o aluno deve aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular o módulo da força resultante (figura 7) e logo em seguida, a segunda Lei de Newton para, então, finalizar o problema. Observe:

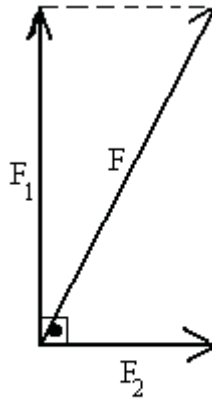


Figura 8

**Fonte:** CALÇADA, C.S. Física Clássica, 1985, p.143.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 \rightarrow F = \sqrt{12^2 + 5^2} \rightarrow F = \sqrt{169} \rightarrow F = 13 \text{ N}$$

Como  $F = m \cdot a$  segue que  $13 = 10 \cdot a$ , e, portanto,  $a = 1,3 \text{ m/s}^2$ .

A seguir, outras aplicações do teorema de Pitágoras, mas ainda utilizando o conceito de força resultante.

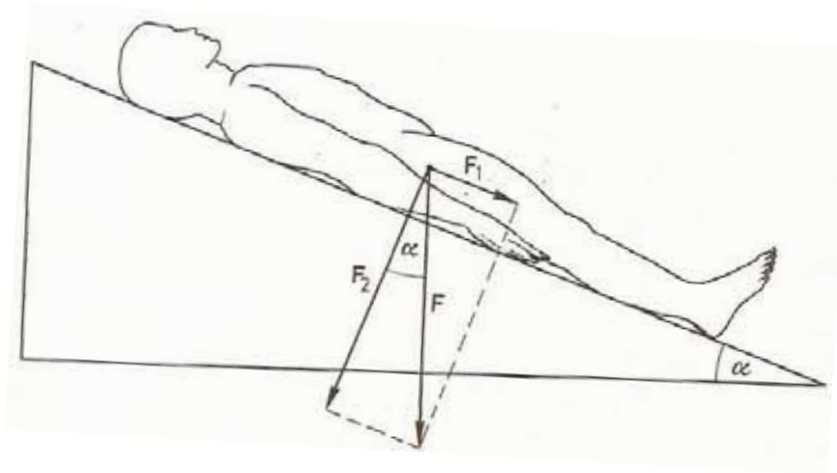
### 2.3 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NA BIOLOGIA

O Teorema de Pitágoras é utilizado em outros campos que não sejam a matemática e a física, como por exemplo, a biologia. Batschelet (1978), em *Introdução à Matemática para Biocientistas*, faz um resumo dos principais assuntos que estes profissionais irão utilizar ao longo da sua carreira. Dentre eles, destaca-se o Teorema de Pitágoras. A Matemática e a Biologia sempre estiveram muito próximas. Como prova, o enfoque geométrico dos desenhos e proporções entre homens e animais, a contagem, mesmo que de forma primitiva, de poções curativas, enfim, os números e procedimentos sempre estiveram ligados à Biologia.

Abaixo, seguem algumas dessas aplicações citadas pelo autor nas páginas 462 e 463, do livro supracitado.

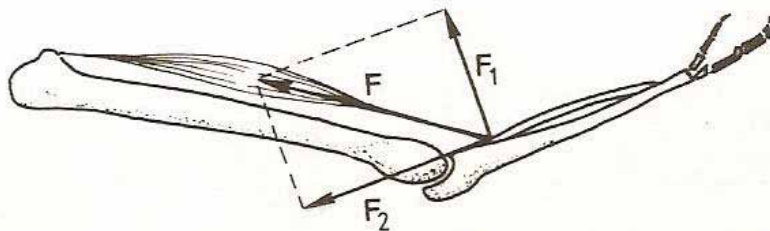
(i) O plano inclinado gerado pelo repouso dos corpos

Qual é a força que tenta puxar o corpo para baixo ao longo do plano e qual é a força que pressiona o corpo contra o plano? Sendo  $F_1$  a força que empurra o corpo para baixo (componente horizontal da força Peso) e  $F_2$  a força perpendicular ao chão (componente vertical da força Peso), a soma desses vetores é a força gravitacional representada por  $F$  (também chamada de força Peso), ou seja,  $F = F_1 + F_2$ . O módulo da força  $F$  é calculado através da aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos vetores  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F$ .



(ii) As alavancas promovidas pelos movimentos dos ossos do braço

Na figura abaixo são observadas as forças que agem sobre um braço. A força  $F$  é decomposta em duas partes: uma componente  $F_1$ , perpendicular ao antebraço; e uma componente  $F_2$ , paralela ao antebraço. A força  $F_1$  é chamada de força de cisalhamento.



Mais uma vez, para se calcular o módulo da força resultante  $F$ , aplica-se o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo formado pelas componentes de  $F$  e a própria força  $F$ .

Mas vale lembrar que em todos esses casos o Teorema de Pitágoras está associado ao cálculo da força resultante que atua sobre os corpos nas diversas situações descritas acima.

Após serem vistos alguns aspectos que mostram a importância do Teorema de Pitágoras, tanto na suas abordagens histórica e de aplicações como também no seu ensino; será relatada, no próximo capítulo, uma experiência feita com dois grupos de alunos no que se refere a duas formas diferentes de demonstração do teorema e a análise (superficial) de questões contextualizadas que foram aplicadas em um teste, sendo que a partir da análise dessa experiência, serão levantadas algumas conclusões parciais desta dissertação.

### 3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATSCHELET, Edward. **Introdução a Matemática para Biocientistas**. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978.

CALÇADA, Caio Sérgio. **Física Clássica: Dinâmica, estática e hidrostática**. São Paulo: Atual, 1985.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar v.9**. 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.

(\_\_\_\_\_.) **Fundamentos de Matemática Elementar 10**. 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 2. Ed. São Paulo: Atual, 1982.

MORGADO, A. C. **Geometria II: Métrica Plana**. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002.